Α.Μ.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1
ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ Α.Μ.
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2018
05 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2018

1. Αποφανθείτε αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ορθοί, αιτιολογώντας πλήρως της απάντηση σας. Αν ο ισχυρισμός είναι ορθός, τότε κάντε πλήρη **απόδειξη** στηριζόμενοι σε ορισμούς και γνωστά θεωρήματα, ενώ αν δεν είναι ορθός, τότε δώστε κατάλληλο **αντιπαράδειγμα**. Βαθμολογείται **μόνον** η αιτιολόγηση.

(i) **(005%)** Δεν υπάρχουν παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f \neq g$ τέτοιες ώστε $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Λύση.
Λάθος. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, και $f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) **(005%)** Η μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που έχει οποιασδήποτε τάξης παραγώγους και οι οποίες είναι όλες ίσες μεταξύ τους, είναι η $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Λύση.
Λάθος. Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(iii) **(005%)** Αν μια ακολουθία έχει άπειρες σε πλήθος υπακολουθίες που συγκλίνουν στο ίδιο όριο, τότε είναι και η ίδια συγκλίνουσα.
Λύση.
Λάθος. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $b_n = (-1)^{(2k)n}$ είναι υπακολουθία της a_n και συγκλίνει στο 1 ως σταθερή. Όμως η αρχική ακολουθία δε συγκλίνει.

(iv) **(005%)** Όλες οι ακολουθίες είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
Λύση.
Λάθος. Παραγωγισιμότητα ορίζεται μόνο σε σημεία συσσώρευσης του πεδίου ορισμού, και το $\mathbb{N}$ δεν περιέχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

(v) **(005%)** Αν $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ και $\lim_{x\to 0} f(x) = l$, τότε υπάρχει το l^{-1}.
Λύση.
Λάθος. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

και έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(vi) **(005%)** Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy μπορεί να αποδειχθεί με διπλή εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Lagrange.
Λύση.
Λάθος. Εφαρμόζοντας δυο φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange, δεν προκύπτει υποχρεωτικά το ίδιο σημείο ξ.

(vii) **(005%)** Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη τότε η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.
Λύση.
Λάθος. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Έχουμε

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

και το $\lim_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει.

(viii) **(005%)** Το supremum μιας συνάρτησης δεν ταυτίζεται υποχρεωτικά με το supremum του συνόλου τιμών της.

Λύση.

Λάθος. Το supremum μιας συνάρτησης ορίζεται ως το supremum του συνόλου τιμών της.

(ix) **(005%)** Αν μια συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Λύση.

Λάθος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, $x \in [1, +\infty)$.

(x) **(005%)** Αν $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει συνεχής επέκταση της στο $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Λύση.

Λάθος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \tan x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

(xi) **(005%)** Το όριο μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο σημείο ξ ισούται με l αν και μόνον αν

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in \mathbb{R}) \text{ με } 0 < |x - \xi| < \frac{1}{n} \text{ ισχύει } |f(x) - l| < \epsilon.$$

Λύση.

Σωστό. Αν το όριο υπάρχει, τότε επιλέγουμε n με $\frac{1}{n} < \delta$, όπου το δ είναι αυτό που εμφανίζεται στον ορισμό του ορίου. Αν ισχύει η σχέση που δίνεται στην εκφώνηση, τότε παίρνουμε $\delta = \frac{1}{n}$.

(xii) **(005%)** Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ και υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x)$ και $\lim_{x\to\xi} f(x)$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to\xi} g(x)$.

Λύση.

Λάθος. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, και

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2. **(010%)** Εξηγήστε γιατί δεν εφαρμόζεται ο Κανόνας L' Hôpital για τον υπολογισμό του ορίου

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}\ .$$

Λύση.

Αν είναι I ένα ανοικτό διάστημα, x_0 εσωτερικό σημείο του I και $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Έστω ότι $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$, εκτός ενδεχομένως από το x_0. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

ή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Τότε, σύμφωνα με τον Κανόνα L' Hôpital, έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

εφόσον το όριο του πηλίκου των παραγώγων υπάρχει ή απειρίζεται θετικά ή αρνητικά. Για το όριο που δόθηκε στην εκφώνηση, θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \backslash\{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],$$

και έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$

το οποίο δεν υπάρχει. Συνεπώς ο Κανόνας L' Hôpital δε μπορεί να εφαρμοστεί στον υπολογισμό του συγκεκριμένου ορίου.

3. **(010%)** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Bolzano, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

Λύση.

Αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_1) < 0$. Ομοίως, αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_2) > 0$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Bolzano, έχουμε το ζητούμενο.

4. **(010%)** Θεωρούμε το σύνολο A που αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει

$$(\forall \epsilon > 0) \text{ ισχύει } -\frac{\epsilon}{2} < x < \frac{\epsilon}{3} \,.$$

Βρείτε το supremum του συνόλου

$$B = \{x^{-1} :\ x \in A \backslash \{0\}\}.$$

Λύση.

Παίρνοντας το όριο όταν το ϵ τείνει στο μηδέν από τα θετικά, στη σχέση

$$-\frac{\epsilon}{2} < x < \frac{\epsilon}{3}$$

έχουμε ότι το μοναδικό στοιχείο του συνόλου A είναι το $x = 0$. Συνεπώς το σύνολο B δεν περιέχει στοιχεία και έτσι $\sup B = \sup \emptyset = -\infty$.

5. **(010%)** Αποδείξτε ότι κάθε πραγματική ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη. Αποδείξτε όποιο θεώρημα χρησιμοποιήσετε.

Λύση.

Έστω $\epsilon > 0$. Από το ορισμό της ακολουθίας Cauchy, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m, n > n_0$ να ισχύει $|a_m - a_n| < \epsilon$. Σταθεροποιούμε το m επιλέγοντας $m = n_0$ και έτσι, για τυχόν $n > n_0$, έχουμε

$$|a_n| \leq |a_{n_0} - a_n| + |a_{n_0}| < \epsilon + |a_{n_0}| = \text{σταθερά}.$$

Για τυχόν $n \leq n_0$, έχουμε

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|,\ \ldots\ , |a_{n_0}|\} = \text{σταθερά}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο.